die hochschul*lehre*
Interdisziplinäre Zeitschrift für Studium und Lehre

Jahrgang 3, 2017
www.hochschullehre.org

Tobias Weich & Max Hoffmann

Exkursinhalte in der fachmathematischen Lehramtsausbildung: Wie man das Wesen und die Rolle der Mathematik vermittelt

Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Vorschläge ausgearbeitet, wie man in der Fachmathematikausbildung für Lehramtsstudierende (Gymnasien und Gesamtschulen) das Wesen der Mathematik und ihre Rolle in der Welt effektiver vermitteln kann. Als Grundlage hierfür wird zuerst reflektiert, was Mathematik als Wissenschaftsdisziplin ausmacht sowie das Wechselspiel der Mathematik mit außermathematischen Problemen diskutiert. Im Anschluss daran wird die Notwendigkeit, das Wesen und die Rolle der Mathematik in der Lehramtsausbildung zu vermitteln, an aktuellen Schullehrplänen sowie durch Ergebnisse aktueller didaktischer Forschung begründet. Als geeignetes Mittel zur Vermittlung dieser Lernziele wird vorgeschlagen, die fachlichen Inhalte der Vorlesungen durch gezielte Exkursinhalte zu ergänzen. Schließlich wird eine konkrete Umsetzung dieser Exkursinhalte im Rahmen einer Vorlesung über Elementargeometrie präsentiert.

Schlüsselwörter

Mathematik, Lehramt, Gymnasium, Geometrie, Exkursinhalte

1 Einleitung

Schon seit der humboldtschen Bildungsreform in Preußen Anfang des 19. Jahrhunderts, ist die Ausbildung der Gymnasiallehrer*innen an den Universitäten verortet (Blömeke, 2009). Somit ist seither die wissenschaftliche Fachausbildung ein wesentliches Kernelement im Curriculum angehender Gymnasiallehrer*innen. Auch heute noch befinden sich in den allgemeinen Bestimmungen der Bachelor- und Master-Studiengänge für angehende Gymnasiallehrer*innen unter anderem die folgenden zu erwerbenden Kompetenzen:

> „[…] Die Absolventinnen und Absolventen
>
> - haben ein solides und strukturiertes Fachwissen (*Verfügungswissen*) zu den grundlegenden Gebieten ihrer Fächer erworben; sie können darauf zurückgreifen und dieses Fachwissen ausbauen;
> - haben Einblicke gewonnen in die grundlegenden Erkenntnis- und Arbeitsmethoden ihrer Fächer und können sie in zentralen Bereichen anwenden.
> - sind in der Lage, diese Methoden in zentralen Bereichen ihrer Fächer anzuwenden.“
>
> (UPB, 2016a, S. 7)

Diese zentrale Rolle der fachwissenschaftlichen[1] Ausbildung ist auch unter dem Gesichtspunkt moderner didaktischer Forschung gerechtfertigt, da grundlegende Arbeiten ihre Bedeutung für die spätere erfolgreiche Unterrichtstätigkeit betonen.[2] Speziell im Fach Mathematik steht die fachwissenschaftliche Ausbildung im Lehramtsstudium doch seit jeher in einem Spannungsfeld, das in den deutlichen Unterschieden zwischen Schul- und Hochschulmathematik begründet liegt, welches schon Anfang des 20. Jahrhunderts von Felix Klein unter dem Schlagwort der „doppelten Diskontinuität“ diskutiert wurde (Klein, 1908).

Ziel dieser Arbeit ist es, die Besonderheiten der fachwissenschaftlichen Mathematiklehramts-Ausbildung zu reflektieren. Aus dieser Reflexion sollen Schlussfolgerungen für die Ausbildung von Lehramtsstudierenden samt lehrpraktischen Umsetzungen generiert

---

[1] Unter der fachwissenschaftlichen Ausbildung verstehen wir diejenigen Lehrveranstaltungen, in denen primär die wissenschaftlichen Inhalte der Disziplin vermittelt werden und die im Gegensatz zu den fachdidaktischen und pädagogischen Veranstaltungen keinen primären Fokus auf die spätere Lehrertätigkeit haben.

[2] „Es scheint, dass Ausbildungsprogramme, die Kompromisse in der fachwissenschaftlichen Ausbildung eingehen, negative Rückwirkungen auf die Entwicklung des fachdidaktischen Wissens und in der Konsequenz auf die erfolgreiche Unterrichtstätigkeit haben. Unterschiede im Fachwissen, die während der Ausbildung auftraten, bleiben über die gesamte Berufskarriere bestehen.“ (Baumert & Kunter, 2011, S. 185)

werden. Sie entstand im Rahmen des Vertiefungsmoduls im Zertifikatsprogramm der Stabstelle Bildungsinnovationen und Hochschuldidaktik der Universität Paderborn und soll gemäß der Idee „Scholarship of Teaching and Learning“ eine forschende Reflexion der eigenen Lehre darstellen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass das Themengebiet, mit dem sich diese Arbeit beschäftigt so umfangreich und komplex ist, dass nur ein kleiner Ausschnitt besprochen werden kann. Wir erheben weder den Anspruch auf Vollständigkeit, noch darauf, einen belastbaren empirischen Beitrag zu aktueller mathematikdidaktischer Forschung zu liefern. Vielmehr wollen wir exemplarisch aufzeigen, wie substanzielle didaktische Überlegungen unter Berücksichtigung fachmathematischer, mathematikdidaktischer und mathematikhistorischer Argumente die universitäre Mathematiklehrerausbildung verbessern können. Die folgenden Ausführungen sind als eine Möglichkeit unter vielen zu sehen.

Um die Gründe für die Besonderheiten des Fachs Mathematik verorten zu können, diskutieren wir in Abschnitt 2 zuerst die Frage, was Mathematik als Fachwissenschaft ausmacht. Insbesondere folgern wir aus der beschriebenen Struktur der Wissenschaftsdisziplin Mathematik, dass es ganz unterschiedliche, teils konträre Motivationen gibt, sich mit ihr zu beschäftigen. Wir vermuten, dass diese unterschiedlichen möglichen Motivationslagen ein Hauptgrund für die Spannungsfelder in der fachmathematischen Ausbildung sind. In Abschnitt 3 diskutieren wir die Konsequenzen, die sich aus den Erkenntnissen des vorangegangenen Abschnitts für eine Verbesserung der fachmathematischen Ausbildung von Lehramtsstudierenden ergeben. Insbesondere betonen wir die Notwendigkeit, die fachlichen Inhalte der Vorlesungen durch gezielte Exkursinhalte zu ergänzen.[3]

Schlussendlich beschreiben wir in Abschnitt 4, wie diese Ansätze in Rahmen der Vorlesung *Grundlagen der Geometrie* im Sommersemester 2016 umgesetzt wurden.

2 Was ist Mathematik?

Eine mögliche Antwort auf diese sehr allgemeine Frage[4] liefert eine Publikation aus dem Jahr 1960. Dort heißt es:

> “[…] mathematics is the science of skilful operations with concepts and rules invented just for this purpose.” (Wigner, 1960, S. 2)

[3] Es sei an dieser Stelle betont, dass wir keinerlei Originalität für die Idee beanspruchen, die Anwendung von Mathematik durch Exkurse in fachmathematischen Veranstaltungen zu verdeutlichen. Diese Idee findet man in zahlreichen Lehrbüchern und Vorlesungsskripten der letzten Jahrzehnte. Ziel dieses Artikels war es vielmehr, diese Idee systematisch mit aktuellen didaktischen Theorien für die Lehramtsausbildung zu verknüpfen, sowie eine praktische Umsetzung gemäß des Constructive Alignments zu beschreiben.

[4] Wir erheben in diesem Abschnitt keinen Anspruch darauf, einen globalen Überblick über die Frage „Was ist Mathematik?“ zu geben, sondern schränken uns bewusst und exemplarisch auf die im Folgenden dargestellte Sichtweise Wigners ein. Dabei ist uns die Existenz anderer Ansätze (Hardy, Freudenthal, …) durchaus bewusst.

Trotz des leicht ironischen Untertons bringt Eugene P. Wigner, einer der bedeutendsten Physiker des 20. Jahrhunderts, darin auf den Punkt, was heutzutage allgemein als moderne Mathematik angesehen wird[5]: Mathematik ist das logische Studium selbstgeschaffener Strukturen. Wigner präzisiert nach obigen Zitat auch noch weiter „the principal emphasis is on the *invention* of concepts“ (Wigner, 1960, S. 2, Hervorhebung MH & TW). Er betont also, dass die in der Mathematik untersuchten Strukturen erst einmal keines praktischen Nutzens bedürfen, sondern rein erfundene Konzepte sind. Wigner stellt damit jedoch nicht die Daseinsberechtigung der Mathematik in Frage, sondern attestiert den Mathematikern Genialität und Sinn für formale Schönheit. Tatsächlich konstatiert er, dass die primäre Existenzberechtigung für die Definition neuer mathematischer Strukturen mit der Frage verknüpft ist, ob man mit ihnen möglichst ästhetische logische Schlussfolgerungen ziehen kann.[6]

Warum sind Wigners Ausführungen über die Mathematik für die Analyse der Mathematiklehrer-Ausbildung von Interesse? Zuerst einmal ist es nun keine Überraschung mehr, wenn die Beschäftigung mit Hochschulmathematik als wirklichkeitsfern oder gar sinnlos für praktische Belange des Lebens angesehen wird. Wenn Mathematik die Betrachtung selbstgeschaffener Strukturen ist, deren primärer Zweck darin besteht, einer vornehmlich von Mathematikern empfundenen Ästhetik zu genügen, dann ist es andererseits überraschend, welchen Stellenwert der Mathematik in unserer Gesellschaft eingeräumt wird: Immerhin ist Mathematik neben Deutsch das einzige Schulfach, das von der ersten Klasse bis zum Abitur durchgängig als Hauptfach unterrichtet wird. Einen möglichen Ansatz zur Erklärung liefert bereits der Titel von Wigners oben zitierten Arbeit: *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*. Der (gesellschaftliche) Nutzen von Mathematik zeigt sich vor allem im Kontext anderer Wissenschaften.[7] Warum bezeichnet Wigner diesen Nutzen als „nicht nachvollziehbar“[8]? Wigner akzeptiert zwar, dass grundlegende Konzepte der Mathematik (wie natürliche Zahlen oder die Objekte der elementaren Geometrie) durch die reale Welt motiviert sind. Als Triebfeder für die fortgeschritteneren Konzepte der Mathematik sieht er jedoch das Streben nach formaler Ästhetik und nicht das Ziel, reale Probleme zu modellieren:

> „Most more advanced mathematical concepts, such as complex numbers, algebras, linear operators, Borel sets – and this list could be continued almost indefinitely – were so devised

---

[5] Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass paradoxerweise keine allseits anerkannte Definition von Mathematik existiert. Der folgenden Aussage sollten heutzutage jedoch ein Großteil der Mathematiker zustimmen können.

[6] “The concepts […] are defined with a view of permitting ingenious logical operations which appeal to our aesthetic sense both as operations and also in their results of great generality and simplicity.” (Wigner, 1960, S. 3)

[7] Wigner beschäftigt sich in seinem Artikel vor allem um die Rolle der Mathematik in der Physik. Die bedeutende Rolle mathematischer Methoden beispielsweise in Wirtschafts- oder Ingenieurswissenschaften ist jedoch ebenso offensichtlich.

[8] Was in diesem Fall vielleicht die treffendste Übersetzung von *unreasonable* darstellt.

> that they are apt subjects on which the mathematician can demonstrate his ingenuity and sense of formal beauty.” (Wigner, 1960, S. 3)

Wigner führt dann weiter aus, dass überraschenderweise für die präzise Beschreibung der modernen physikalischen Naturgesetze gerade solche fortgeschrittenen mathematischen Strukturen notwendig sind, die von Mathematikern oft Jahrzehnte vorher aus rein intrinsischer Motivation entwickelt wurden. Und genau in dieser Diskrepanz zwischen der ursprünglichen Motivation zur Entwicklung der mathematischen Konzepte und ihrem Nutzen in ganz anderen Kontexten sieht er ein Mysterium, das er ins Zentrum seines oben zitierten Artikels stellt.

Es sei an dieser Stelle dahingestellt, ob das Streben nach formaler Ästhetik tatsächlich die dominante Triebkraft hinter der Entwicklung neuer mathematischer Konzepte ist, oder ob Wigners Ausführungen an dieser Stelle etwas überspitzt sind. In der Tat haben viele der modernen mathematischen Strukturen ihren Ursprung in konkreteren innermathematischen Problemstellungen.[9] Nichtsdestotrotz sind auch viele der so entstandenen Begriffsgebilde von einer ihnen eigenen Ästhetik geprägt und unbestreitbar ist, dass immer wieder mathematische Konzepte, die ursprünglich aus rein innermathematischen Fragestellungen entstanden sind, in ganz überraschenden Kontexten eine konkrete Anwendungen in der Realität finden und somit Einzug in unseren Lebensalltag erhalten.

Wigner belegt seine Thesen sehr eindrucksvoll am Beispiel der Quantenphysik. Wir ermutigen den interessierten Leser zur Lektüre seiner äußerst lesenswerten Ausführungen (Wigner, 1960, S. 6 f.), wählen an dieser Stelle jedoch ein einfacheres Beispiel zur Illustration der Wirkweise von Mathematik: die Natürlichen Zahlen.

Archäologische Funde legen nahe, dass bereits der prähistorische Mensch vor mehr als 20.000 Jahren mit Hilfe von Kerben in Knochen gezählt hat. (Ifrah, 1991, S. 110 f.) Diese Erkenntnis, dass die Kerben und die Anzahl zu zählender Dinge Repräsentanten ein und derselben komplett abstrakten Größe sind, ist in der Tat eine beachtliche intellektuelle Leistung und kann als Geburtsstunde der natürlichen Zahlen gesehen werden.

Ist die intellektuelle Leistung vollbracht, eine gewisse Anzahl von Objekten durch eine Zahl zu repräsentieren, so ist es sehr naheliegend, mathematische Operationen mit diesen Zahlen durchzuführen, die direkt durch reale Operationen mit den Objekten, z. B. Nutztieren, motiviert sind: Das Zusammenlegen zweier Herden entspricht der Addition, das gleichmäßige Aufteilen einer großen Herde auf zwei Hirten entspricht der Division usw. Es ist offensichtlich, dass mathematische Fortschritte in einem solchen Kontext einen direkten praktischen Nutzen haben: Wenn man mathematische Algorithmen entwickelt, die es erlauben, Rechenoperationen effizient auszuführen, so ermöglicht das die effiziente Verwaltung einer großen Menge an Gütern.

---

[9] Beispielsweise entstammt die Gruppentheorie aus dem Wunsch, Nullstellenmengen von Polynomen in der Galois-Theorie zu beschreiben.

Auch sehr grundlegende mathematische Errungenschaften, wie die Einführung des Dezimalsystems und die damit verbundene Möglichkeit der noch heute genutzten schriftlichen Addition, waren von direktem praktischem Nutzen. Es ist also unbestreitbar, dass ein Teil des mathematischen Fortschrittes direkt von realen Problemstellungen motiviert war.[10] Ebenso offensichtlich ist jedoch, dass es parallel ganz grundlegende mathematische Fortschritte gab, die sich aus rein intrinsischer mathematischer Motivation ergaben. Ein treffendes Beispiel sind die Primzahlen: Schon die antiken griechischen Forscher interessierten sich für diese, vom mathematischen Standpunkt besonders interessanten Zahlen, die nur durch eins und sich selbst teilbar sind. Euklids Beweis für die Existenz unendlich vieler Primzahlen oder das Sieb des Eratosthenes sind Resultate aus der damaligen Zeit, die noch heute geläufig sind. Das Verständnis der Primzahlen stellt jedoch auch in der modernen Mathematik eines der wichtigsten Forschungsgebiete dar. So haben bedeutende Mathematiker, wie Fermat, Leibniz, Euler, Gauß, Riemann, Ramanujan (und diese Liste ist nicht ansatzweise vollständig), ganz grundlegende Resultate zur Verteilung der Primzahlen bewiesen oder Algorithmen entwickelt, möglichst große Zahlen auf ihre Primzahleigenschaft zu testen. Die Motivation für diese eingehende Beschäftigung mit den Primzahlen muss in der Tat eine rein mathematisch intrinsische Natur gewesen sein, die vor allem von der mathematischen Ästhetik dieses Gebietes getrieben war. Über mehr als zwei Jahrtausende hinweg gab es keinerlei praktischen Nutzen der Primzahlen. Für manche Mathematiker*innen war diese Abwesenheit von praktischem Nutzen in der Zahlentheorie jedoch keinesfalls ein Makel, sondern eine besondere Quelle der Motivation sich mit dieser Thematik zu befassen[11].

Die Bedeutung der Primzahlen für praktische Probleme änderte sich jedoch grundlegend Ende des 20. Jahrhunderts mit der Entwicklung asymmetrischer Kryptographieverfahren wie dem RSA-Kyptosystem, das auf der leicht nachvollziehbaren Tatsache beruht, dass es um Größenordnungen einfacher ist, zwei Primzahlen zu multiplizieren als eine große Zahl in ihre Primfaktoren zu zerlegen. Mit dieser Entdeckung hielten auf einmal Erkenntnisse über die Struktur der Primzahlen, die Mathematiker*innen über Jahrhunderte aus rein mathematisch ästhetischen Gründen entwickelt haben, Einzug in den praktischen Lebensalltag. Ihre Anwendungen, wie Online Banking und sichere Kommunikation, sind aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken.

[10] In der Tat finden sich eine Menge an solchen Beispielen in ganz verschiedenen Teildisziplinen der Mathematik. Wir möchten hier nur exemplarisch an die Mitbegründung der Differentialrechnung durch Newton im Zusammenhang seiner mechanischen Bewegungsgleichungen, an die Begründung der Fourieranalysis von Joseph Fourier im Kontext der Wärmeausbreitung in Festkörpern oder an die Entwicklung des Krümmungsbegriffs oder die Fehlerrechnung durch Gauß im Rahmen seiner Tätigkeit als Hannoveraner Landvermesser erinnern.

[11] Vgl. z. B. (Beiler, 1964, S. 2): „E.E. Kummer is said to have remarked on one occasion that of all his discoveries he appreciated his ideal numbers most because they had not soiled themselves as yet with any practical applications.“.

Wir möchten abschließend in diesem Kapitel die Erkenntnisse über das Wesen der Mathematik zusammenfassen:

- Reine Mathematik ist das logische Studium selbstgeschaffener Strukturen. Als solche benötigt sie zur Legitimation weder praktischen Nutzen noch Anwendungen.
- Viele der grundlegenden mathematischen Strukturen sind jedoch aus der Abstraktion von Problemen unseres alltäglichen Lebens entstanden, wie zum Beispiel die natürlichen Zahlen oder metrische Räume, auf die wir in Abschnitt 4 weiter eingehen werden.
- Als Antrieb für mathematische Entwicklungen lassen sich im Wesentlichen zwei Punkte nennen:
    1. das Wechselspiel mit direkten praktischen Problemstellungen, wie zum Beispiel die oben erwähnte Infinitesimalrechnung oder die Fourieranalysis.
    2. das Streben nach ästhetischen logischen Erkenntnissen. Hierfür bildet der Abstraktionsprozess die Grundlage, die es erlaubt, mathematische Strukturen losgelöst von den ursprünglichen Anwendungen zu studieren. Oft ergeben sich somit Fragestellungen, die rein innermathematisch aufgrund der logischen Strukturen an sich interessant sind. Als Beispiel hierfür kann die über zwei Jahrtausende verfolgte Frage nach der Verteilung der Primzahlen dienen.
- Es lassen sich zwei grundsätzlich verschiedene Wege identifizieren, auf denen mathematische Erkenntnisse Anwendungen in außermathematischen Problemstellungen finden:
    1 Bei den mathematischen Fortschritten, die im Wechselspiel mit praktischen Problemstellungen entwickelt wurden, ist eine außermathematische Anwendung direkt gegeben.
    2 Häufig erweisen sich jedoch auch solche mathematischen Erkenntnisse von großem außermathematischem Nutzen, deren Entwicklung ursprünglich rein durch das innermathematische Streben nach logischer Ästhetik motiviert war. Dies geschieht in der Regel zu einem viel späteren Zeitpunkt als die mathematische Arbeit und in einem Kontext, der bei der Entwicklung der Resultate unvorhersehbar war. Ein Beispiel hierfür liefert die Kenntnis großer Primzahlen, die in der RSA-Verschlüsselung ihre Anwendung fand. Dieses überraschende Auftreten tiefgreifender mathematischer Konzepte ist dabei keine Ausnahme, sondern von faszinierender Regelmäßigkeit, wie es auch Wigner (1960) in seiner Arbeit *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences* ausführt.
- Auch wenn es falsch wäre, die gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik rein auf ihre Anwendungen zu reduzieren[12], so ist unbestreitbar, dass sie durch ihre Effektivität in anderen Wissenschaftsdisziplinen eine zusätzliche Relevanz erhält.

[12] Man rufe sich zum Beispiel ins Gedächtnis, dass Euklids Elemente über 2000 Jahre hinweg das meistverbreiteteste Buch nach der Bibel war. Der Grund hierfür lag aber nicht darin, dass die

3 Exkursinhalte in der Fachmathematikausbildung

Wir wollen nun die Erkenntnisse des vorangegangenen Kapitels aufgreifen und kurz ihre Konsequenzen für die Fachmathematik-Ausbildung von Lehramtsstudierenden diskutieren:

Wie im vorherigen Kapitel erläutert, ist Mathematik im Kern das logische Studium selbstgeschaffener Strukturen. Das primäre Lernziel von Fachmathematik-Veranstaltungen ist es daher, Wissen über solche Strukturen sowie die Fähigkeit der logisch stringenten Argumentation mit ihnen zu vermitteln. Häufig besuchen Lehramtsstudierende dafür dieselben Vorlesungen wie die Studierenden der Mathematik.

Wir haben auch gesehen, dass das Streben nach einem tiefen Verständnis der selbstgeschaffenen abstrakten Strukturen aus rein ästhetischen Gründen eine der Haupttriebfedern der Mathematik ist. Folglich wird in Hochschulvorlesungen der reinen Mathematik häufig bei den Studierenden vorausgesetzt, dass sie diese Motivation teilen. Beispiele der Anwendung der Mathematik auf außermathematische Themen lernen Studierende der Mathematik in der Regel erst im späteren Verlauf des Studiums in Vorlesungen der angewandten Mathematik sowie in den Nebenfachvorlesungen kennen.

Für Lehramtsstudierende stellt die Teilnahme an Vorlesungen der reinen Mathematik daher in doppelter Hinsicht eine Schwierigkeit dar: Zum einen kann man vermuten, dass bei ihnen die Motivation, Mathematik im Schulkontext zu unterrichten, höher ist als Mathematik zum Selbstzweck zu studieren. Zum anderen ist im Lehramtsstudium aufgrund des gestiegenen Anteils an didaktischen und pädagogischen Veranstaltungen nur eine überschaubare Anzahl an reinen Mathematikvorlesungen vorgesehen. Lehramtsstudierende kommen daher häufig in ihrem Studium gar nicht dazu, Veranstaltungen zu belegen, die außermathematische Anwendungen thematisieren.

Es müssen also geeignete Maßnahmen ergriffen werden, damit das Fachmathematik-Studium gewinnbringend in das Lehramtsstudium integriert werden kann. Hierfür gibt es verschiedene Ansätze, von denen wir exemplarisch die Schnittstellenaktivitäten nach Bauer und Partheil (2009) und Bauer (2013) erwähnen wollen, der darauf abzielt, die Inhalte der Hochschulmathematik mit Inhalten der Schulmathematik gezielt in Verbindung zu setzen. Hierdurch sollen die Erkenntnisse des Fachmathematik-Studiums im zukünftigen Lehralltag besser nutzbar werden.

Die in unserer Arbeit beschriebenen Lehrinnovationen zielen ebenfalls darauf ab, das Fachmathematik-Studium für die Lehrertätigkeit zu funktionalisieren. Allerdings soll nicht an Schulinhalte angeknüpft werden, sondern durch gezielte Maßnahmen das Wesen der Mathematik und ihre Rolle in der Welt verdeutlicht werden.

---

darin behandelte Mathematik besonders alltagsrelevant war, sondern dass sie als besonders schön galt und zur Schulung logischer Argumentation verwendet wurde.

Bevor wir die Umsetzung dieser Maßnahmen näher besprechen, soll zuerst erörtert werden, aus welchen Gründen diese Inhalte für die Ausbildung angehender Mathematiklehrer von Bedeutung sind:

Im Sekundarstufen-I-Kernlehrplan für Gymnasien und Gesamtschulen (NRW) finden wir folgende Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern (SuS) zu erwerbender *mathematischer Grundbildung*:

> „**Mathematische Grundbildung** umfasst die Fähigkeit, die Rolle zu erkennen, die Mathematik in der Welt spielt, mathematisches Wissen funktional, flexibel und mit Einsicht zur Bearbeitung vielfältiger kontextbezogener Probleme einzusetzen und begründete mathematische Urteile abzugeben. Sie beinhaltet insbesondere die Kompetenz des problemlösenden Arbeitens in inner- und außermathematischen Kontexten. […]" (MSW NRW, 2007, S. 11)

Dies ist konsistent mit den Ausführungen von Winter (1995) zum Thema *Mathematik und Allgemeinbildung*. Es ist also auf jeden Fall erforderlich, dass eine angehende Mathematiklehrkraft substanzielle Vorstellungen zur Rolle der Mathematik in der Welt besitzt. Nur dann können SuS mathematische Grundbildung im obigen Sinne erwerben. Dies ist ebenfalls konsistent mit aktuellen Modellen zur Entwicklung professioneller Kompetenz von Lehrkräften: Kunter, Kleickmann, Klusmann und Richter (2011, S. 59 f.) beispielsweise beschreiben im Rahmen des COACTIV-Projektes die Nutzung von Lerngelegenheiten im Studium als Determinante für das spätere Lernen der SuS.

Basierend auf den Ausführungen in Abschnitt 2 war uns vor allem wichtig, in den Vorlesungen zu vermitteln, auf welche Weise und durch welche Motivation mathematische Entwicklungen vorangetrieben werden sowie, auf welchen Wegen mathematische Erkenntnisse zu ihren außermathematischen Anwendungen führen.[13] Dadurch soll auf keinen Fall das primäre Lernziel, die Fähigkeit mit den mathematischen Strukturen zu arbeiten, aus dem Auge verloren werden. Allerdings wird aus unseren Reflexionen in Kapitel 2 klar, dass das bloße Unterrichten der Strukturen kein vollständiges Bild vom Wesen der Mathematik vermitteln kann. Im besten Fall können die Studierenden die Ästhetik der logischen Aussagen und Argumente nachvollziehen und diese als Motivation zum Studium dieser Strukturen erkennen. Im schlimmsten Fall, falls diese Ästhetik nicht nachempfunden werden kann, entsteht der Eindruck von Mathematik als einem abstrakten realitätsfernen Gebilde. Um ein vollständigeres Bild der Motivationen zur Entwicklung mathematischer Strukturen als auch deren Nutzen zu vermitteln, ist nach den Überlegungen in Abschnitt 2 klar, dass die fachlich behandelten Strukturen in einen historischen Kontext gesetzt oder mit andersartigen Problemstellungen verknüpft werden müssen. Es ist in der Regel so, dass hierfür geeignete Problemstellungen weder Teil des fachlichen Inhalts der Vorlesung sind, noch im Schulstoff gefunden werden können. Wir haben uns daher entschieden, den Inhalt

[13] Selbstverständlich ist dies keine allumfassende Sichtweise über die Rolle der Mathematik in der Welt, jedoch geben die gewählten Beispiele einen Eindruck wichtiger Teilaspekte.

der Vorlesung durch geeignete *Exkursinhalte* anzureichern, die dafür geeignet sind, ein vollständigeres Bild vom Wesen und der Rolle der Mathematik zu vermitteln. Im Kapitel 4 werden wir konkrete Beispiele für solche Exkursinhalte vorstellen.

Im verbleibenden Teil dieses Kapitels wollen wir sie jedoch zuerst mit der universitären Lehramtsausbildung theoretisch verknüpfen. Dazu bietet es sich an, zunächst eine Einbettung in die im Lehramtsstudium zu erreichenden Kompetenzen vorzunehmen. Wir werden uns dabei auf die aktuellen Prüfungsordnungen für die Studiengänge *Bachelor* und *Master of Education für den Studiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik* beziehen. Folgende der dort aufgeführten Kompetenzen können durch die Auseinandersetzung mit den oben genannten Sichtweisen gefördert werden:

- „[Die Studierenden] verfügen über einen Zugang zu grundlegenden Fragestellungen der Mathematik [...]“ (UPB, 2016b, S. 3)

- „[Die Studierenden] sind mit Erkenntnis- und Arbeitsmethoden der Mathematik vertraut und in der Lage, diese Methoden in zentralen Bereichen inner- und außerhalb der Mathematik anzuwenden“ (UPB, 2016b, S. 3)

- „[Die Studierenden] verfügen aufgrund ihres Überblickswissens (Orientierungswissen) über den Zugang zu grundlegenden Fragestellungen der Mathematik“ (UPB, 2016c, S. 3)

- „[Die Studierenden] setzen reflektiertes Wissen über die Mathematik (Metawissen) ein, um neue fachliche und fächerverbindende Entwicklungen selbstständig in den Unterricht und in die Schulentwicklung einzubringen“ (UPB, 2016c, S. 3)

Für eine theoretische Einbettung dieser Auszüge in den Bereich der Lehrerprofessionalitätsforschung nutzen wir die auf Shulmans *knowledge base* für Lehrkräfte (Shulman, 1987, S. 7) aufbauende empirisch fundierte Konzeption der *Practise-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching* (vgl. bspw. Ball, Thames & Phelps, 2008; Ball & Bass, 2009) so lässt sich das Wissen eines Lehramtsstudierenden, der sich mit den obigen Sichtweisen auseinandersetzt, in den Bereich des *Horizon Content Knowledge* einordnen[14]. Dieses stellt einen Teilbereich des sogenannten *Mathematical Knowledge for Teaching* dar, der Überblickwissen über Mathematik als Wissenschaft (bspw. über fundamentale Zusammenhänge) beschreibt (Ball & Bass, 2009).

Auf die sich anschließende Frage, wie dieser Teil mathematischen Professionswissens in der universitären Lehrerausbildung berücksichtigt werden kann, werden wir im nächsten Abschnitt einen Antwortvorschlag machen. Im Rahmen einer Bachelor-Lehramt Mathematik-Vorlesung über Grundlagen der Geometrie wurden entsprechende Innovationen eingeführt und werden im Folgenden vorgestellt.

[14] „We define horizon knowledge as an awareness – more as an experienced and appreciative tourist than as a tour guide – of the large mathematical landscape in which the present experience and instruction is situated.“ (Ball & Bass, 2009, S. 6)

4 Umsetzung der Exkursinhalte im Rahmen der Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“

Bei der Umsetzung der Exkursinhalte haben wir uns von den folgenden Prinzipien leiten lassen:

- Exkursinhalte sollen sparsam dosiert eingesetzt werden. Auch wenn sie zum Ziel haben, wichtige Kompetenzen für die angehenden Lehrer*innen zu vermitteln, so sollen diese in möglichst geringem Umfang zu Lasten der mathematischen Inhalte oder ihrer Verknüpfung mit schulrelevanten Themen im Sinne des Schnittstellengedankens gehen.
- Die Exkursinhalte sollen stark mit dem fachlichen Stoff der Vorlesung verwoben sein.
- Im Sinne des *Constructive Alignment* sollen die Inhalte der Exkursinhalte möglichst auch in die Leistungskontrolle einbeziehbar sein.

Wir wollen nun anhand zweier Beispiele die Umsetzung der Exkursinhalte im Rahmen der Vorlesung „Grundlagen der Geometrie“ illustrieren. Bei dieser Vorlesung handelt es sich um ein Angebot speziell für Lehramtsstudierende für Gymnasium und Gesamtschule im zweiten Semester. Inhaltlich liegt der Fokus sowohl auf der Einführung verschiedener grundlegender geometrischer Strukturen (metrische Räume, normierte und Euklidsche Vektorräume) als auf dem Studium der axiomatischen Geometrie. Organisatorisch fanden wir für die Umsetzung der Exkurse folgende Rahmenbedingungen vor: Die Veranstaltung bestand aus drei Semesterwochenstunden (SWS) Vorlesung, während der in der Regel die fachlichen Inhalte in einem Tafelvortrag vermittelt werden. Begleitend zur Vorlesung war ein Übungsbetrieb mit zwei SWS vorgesehen. Hierfür mussten die Studierenden in Heimarbeit Übungsaufgaben bearbeiten, die von den Tutor*innen korrigiert wurden und deren Lösung dann gemeinsam in den Übungsgruppen (à ca. 20 Teilnehmer) diskutiert wurde.

Wir möchten an zwei Beispielen erläutern, wie die Exkursinhalte im Rahmen dieser Vorlesung konkret umgesetzt wurden:

In unserem ersten Beispiel knüpft der Exkursinhalt fachlich an die axiomatische Geometrie an, die im zweiten Teil der Vorlesung behandelt wurde. Der Hauptstoff der Vorlesung über axiomatische Geometrie war schon so gegliedert, dass stringent zwischen Aussagen unterschieden wurde, die auch ohne das Parallelenaxiom[15] gültig sind und solchen, für die das Parallelenaxiom notwendig ist. Auf diese Weise lernten die Studierenden auf fachlicher Ebene, dass sich viele geometrische Sachverhalte auch ohne das Parallelenaxiom beweisen lassen. Außerdem wurde die hyperbolische Ebene als Beispiel für eine Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, besprochen. Die Studierenden lernten also schon

[15] Das Parallelenaxiom besagt, dass zu einer gegebenen Gerade und einem beliebigen Punkt, der nicht auf der Geraden liegt, genau eine Gerade durch den Punkt parallel zur anderen Gerade existiert.

direkt die Lösung des Parallelenproblems kennen, nämlich die Erkenntnis, dass es auch mathematisch sinnvolle Geometrien gibt, in denen das Parallelenaxiom nicht gilt.

Der zugehörige Exkurs hatte zum Ziel, diese Erkenntnis historisch einzubetten, zu erklären, aus welcher Motivation sich bedeutende Mathematiker mit diesem über 2000 Jahre ungelösten Problem beschäftigten und welche Auswirkungen die Lösung des Problems für die Geometrie mit sich brachte. Dies wurde in der Vorlesung in einem 45-minütigen Vortrag diskutiert. Hierbei wurde vor allem aufgezeigt, dass das Parallelenproblem zwar keinerlei praktische Relevanz hatte, sondern, dass es nur darum ging, einen ästhetischen Makel im Aufbau der axiomatischen Geometrie zu beheben. Trotzdem oder gerade deswegen zog es viele bedeutende Mathematiker in seinen Bann, unter anderem Gauß, der zwar eine Lösung fand, der aber zu seinen Lebzeiten nie wagte, sich zu dieser Lösung zu bekennen. Durch Zitate aus Gauß‘ posthum veröffentlichten Briefen wurde deutlich, warum er Skrupel hatte, mit seinen Erkenntnissen an die Öffentlichkeit zu treten: Für Gauß und seine Zeitgenossen war Geometrie noch das rigorose Studium des realen Raumes und nicht das Studium selbstgeschaffener abstrakter Strukturen. Somit war für Gauß eine Geometrie ohne Parallelenaxiom nur möglich, wenn es auch in der realen Welt keine eindeutige Parallele gibt, sprich wenn der physikalische uns umgebende Raum gekrümmt wäre[16]. Mit dieser Aussage befürchtete er wohl jedoch bei seinen Zeitgenossen auf Ablehnung und Unverständnis zu treffen.

Ein solcher historischer Ausblick ist also bestens geeignet, das Streben nach logischer Ästhetik als Triebfeder mathematischer Entwicklung zu verdeutlichen. Auch wenn es bisher schwer fällt, einen direkten außermathematischen Nutzen Nichteuklidischer Geometrie zu benennen, so kann man anhand von historischen Zitaten doch belegen, dass die Lösung des Parallelenproblems einherging mit einem Wandel des Selbstverständnisses der Geometrie. War Geometrie bis dahin noch die Wissenschaft des real existierenden Raumes, so vollzog sich kurz darauf[17] der Wandel hin zu einem Studium zum Teil sehr abstrakter mathematischer Strukturen. Es wäre an dieser Stelle sicherlich auch möglich gewesen, den Exkurs in den Übungsbetrieb der Vorlesung einzubeziehen, und die Studierenden zum Beispiel mit historischen Texten arbeiten zu lassen. Da dies jedoch zu Lasten wichtiger fachlicher Übungsaufgaben gegangen wäre, verzichteten wir darauf.

Im oben beschriebenen Exkurs wird vor allem das Streben nach logischer ästhetischer Kohärenz als Triebfeder für mathematische Entwicklungen thematisiert. In einem weiteren Exkurs hatten wir uns als Ziel gesetzt, den Studierenden zu illustrieren, dass die Einführung abstrakter mathematischer Strukturen und ihr Studium es auf lange Frist ermöglichen,

[16] „Alle meine Bemühungen, einen Widerspruch, eine Inconsequenz [sic!] in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie zu finden, sind fruchtlos gewesen, und das Einzige, was unserem Verstande darin widersteht, ist, dass es, wäre sie wahr [sic!], im Raum eine an sich bestimmte (obwohl uns unbekannte) Lineargrösse [sic!] geben müsste“ Gauß, 1824 zitiert nach (Scriba & Schreiber, 2013, S. 423)

[17] siehe Kleins Erlanger Programm

Probleme zu lösen, die ursprünglich nicht im Fokus lagen. Dies sollte am Beispiel der Codierungstheorie geschehen: Hierbei können elementare Erkenntnisse, die man durch das Studium einer geometrisch motivierten mathematischen Struktur, den metrischen Räumen, erhält, auf komplett nicht-geometrische Probleme, nämlich der Fehlerkorrektur in der Informationsverarbeitung, angewandt werden.

Anknüpfungspunkt an die fachlichen Inhalte lieferte hierfür das im Modulplan vorgesehene Studium metrischer Räume. Die metrischen Räume wurden zuerst als eine abstrakte mathematische Struktur eingeführt, die sich jedoch direkt geometrisch über den Abstandsbegriff von Punkten in der Tafelebene motivieren lässt. Neben den üblichen Standardbeispielen wurde in der Vorlesung der Hamming-Abstand eingeführt. Eine der Übungsaufgaben bestand darin, zu verifizieren, dass der Hamming-Abstand die abstrakten Eigenschaften einer Metrik erfüllt. Hierdurch wurde neben der inhaltlichen Auseinandersetzung mit den mathematischen Begriffen der Vorlesung der Grundstein für den Exkursinhalt gelegt. Im weiteren Verlauf der Vorlesungen wurden in den metrischen Räumen geometrische Strukturen wie metrische Geraden, Kugeln und Kreise eingeführt sowie auf abstraktem Level deren Eigenschaften diskutiert. Unter anderem wurde dabei folgendes Lemma zum Schnittverhalten von Kugeln in metrischen Räumen bewiesen:

Lemma 1. *Sei (M, d) ein metrischer Raum, $m_1, \ldots, m_N \in M$ eine endliche Anzahl von Punkten, $R > 0$ eine positive reelle Zahl, sodass*

$$\forall\ 1 \leq i < j \leq N\ :\ d(m_i, m_j) > 2R,$$

dann gilt für die abgeschlossenen Kugeln $B_R(m_i)$ mit Radius R und Mittelpunkt m_i, dass

$$\forall\ 1 \leq i < j \leq N\ :\ B_R(m_i) \cap B_R(m_j) = \emptyset.$$

Abbildung 1: Lemma aus der Vorlesung

Dieses Lemma stellt ein sehr typisches Beispiel für die Hochschulmathematik in den ersten Semestern dar: Im konkreten Beispiel der Geometrie der Tafelebene, ist die Aussage, dass sich zwei Kugeln mit Radius *R* nicht schneiden, falls ihre Mittelpunkte weiter als *2R* voneinander entfernt sind, intuitiv vollkommen klar. Durch die mathematische Abstraktion wird die Aussage zum einen rigoros beweisbar, zum anderen wird ihr Gültigkeitsbereich in einem unbezifferbaren Ausmaß vergrößert: Sie gilt nicht mehr nur in der unserem Vorstellungsvermögen gut zugänglichen Tafelebene, sondern in einem beliebigen metrischen Raum, unabhängig davon, wie abstrakt er ist. Für eine*n erfahrene*n Mathematiker*in ist offensichtlich, dass Aussagen in solcher Allgemeinheit von großem Nutzen sein können, von einer*m Student*in im zweiten Semester ist jedoch schwer zu verlangen, dass er diesen Nutzen selbständig erkennt. Um diesen Nutzen zu verdeutlichen, fügten wir am Ende des Kapitels über die geometrischen Strukturen (wenige Vorlesungen nach dem Beweis des obigen Lemmas) einen Exkurs in die Codierungstheorie ein: Zuerst wurde in einem 45-minütigen Folienvortrag die Problematik einer automatischen Korrektur von Übertragungsfehlern in der Informationsverarbeitung gegeben. Ausgehend vom Beispiel der Robustheit der deutschen Sprache gegenüber zufälligen Tippfehlern wurde die Frage aufgeworfen, wie viele Tippfehler man bei einem fest vorgegeben Wörterbuch (Code) erkennen bzw. korrigieren kann. Durch Verwendung des zuvor in der Vorlesung behandelten Hamming-Abstands als Metrik sowie obigen Lemmas über die Disjunktheit der abgeschlossenen Kugeln lässt sich die Frage nach der Korrigierbarkeit von Übertragungsfehlern einfach klären. Anknüpfend an die Inhalte des Vortrages regten wir die Studierenden durch die in Abbildung 2 abgebildete Heimübungsaufgabe dazu an, die Inhalte des Vortrages nachzuvollziehen, zu verstehen und auf eine leicht abgeänderte Problemstellung selbstständig anzuwenden. Unabhängig vom Bezug zu den Exkursinhalten stellte die Übungsaufgabe auch eine Gelegenheit dar, die Argumentation im Rahmen der metrischen Räume zu üben, hatte also auch einen direkten Nutzen für die fachlichen Inhalte der Vorlesung.

Auch in die Lernkontrolle der Klausur am Ende des Semesters fand dieser Exkurs Eingang. In einem Aufgabenkomplex (siehe Abbildung 2) über metrische Räume bestand eine Teilaufgabe darin, für einen gegebenen Code die Anzahl der detektierbaren Fehler bezüglich einer zuvor entwickelten Metrik zu bestimmen.

Übung 25 (Detektierbarkeit von Übertragungsfehlern – 3 Punkte)
Wie in der Vorlesung betrachten wir das Alphabet $A = \{0, 1\}$ und die Menge A^n aller Wörter der Länge $n \in \mathbb{N}$ zusammen mit dem Hamming-Abstand aus Übung 1.

In der Vorlesung haben Sie unter Zuhilfenahme geometrischer Überlegungen hergeleitet, unter welchen Bedingungen man r Übertragungsfehler eindeutig korrigieren kann. Gehen Sie nun davon aus, dass Sie die Fehler nicht korrigieren wollen, sondern, dass es dem Empfänger ausreicht, zu erkennen, dass eine fehlerhafte Nachricht angekommen ist.

Stellen Sie sich vor, Sie sollen auf A^n eine Menge $S \subset A^n$ sinnvoller Wörter definieren, damit ein Computer mit einem elektronischen Bauteil kommunizieren kann. Sie wissen, dass die verwendeten Kommunikationswege fehleranfällig sind. Dieser Fehler ist aber kontrollierbar, denn es werden nie mehr als $F > 0$ Zeichen falsch übermittelt.

Wie weit müssen die Wörter in S mindestens entfernt sein, damit erkannt werden kann, dass ein Übertragungsfehler aufgetreten ist. Es darf nicht passieren, dass Übertragungsfehler dazu führen, dass ein anderes sinnvolles Wort übermittelt wird.

Abbildung 2: Übungsaufgabe zum Verständnis und Transfer der Inhalte aus dem Exkurs über Kodierungstheorie

5 Fazit

Unsere Erfahrungen mit der Umsetzung der Exkursinhalte waren durchweg positiv. Durch die enge Verflechtung mit den fachlichen Inhalten nahmen die Exkurse zeitlich nicht zu viel Raum in der Vorlesung ein. Das Interesse und die Aufmerksamkeit der Studierenden waren während der Exkurse gefühlt höher als in den Veranstaltungen zu den Fachinhalten. Es ist allerdings anzumerken, dass das Interesse am Exkurs zum Hamming-Abstand deutlich höher war als am historischen Exkurs. Wir vermuten, dass dies daran lag, dass es uns besser gelungen ist, diesen Exkurs in den Übungsbetrieb und die Leistungskontrolle zu integrieren. Die Konzeption der Exkurse gemäß des *Constructive Alignments* scheint somit eine wichtige Facette zu sein. Was den Umfang der Exkursinhalte angeht, so würden wir diesen in zukünftigen Veranstaltungen nicht wesentlich ändern, damit die Exkurse nicht spürbar zu Lasten der fachlichen Inhalte gehen. Man könnte lediglich überlegen, ob man auch den historischen Exkurs im Übungsbetrieb verankert und die Studierenden dabei mit historischen Quellen arbeiten lässt.

Eine seriöse Untersuchung, ob die Exkursinhalte zum Verständnis des Wesens und der Rolle der Mathematik signifikant beitrugen, ist im Rahmen einer einzelnen Veranstaltung leider nicht möglich. In einer am Ende des Semesters durchgeführten Evaluation gaben jedoch 57% der befragten Studierenden[18] an, dass die Vorlesung im Vergleich zu anderen Fachmathematik-Veranstaltungen besser geeignet war, Einblicke in das Wesen moderner Hochschulmathematik zu erhalten. 36% sahen in diesem Punkt keinen Unterschied zu anderen Veranstaltungen und 7% empfanden die Veranstaltung als weniger gut geeignet. Ähnlich verhielt es sich mit der Eignung „die Bedeutung der Mathematik in unserer technologisierten Gesellschaft" zu vermitteln (55% besser geeignet, 39% gleich, 6% schlechter).

[18] Die Daten sind ein Auszug aus einer Evaluation der Vorlesung. Diese wurde mittels eines Fragebogens anonym während der Vorlesung am Ende des Semesters durchgeführt. Insegsamt 67 Studierende nahmen daran teil. Die folgenden Aussagen beziehen sich auf die folgenden beiden Fragen, die im Wortlaut lauten:

„Wie gut war die diesjährige Vorlesung ‚Grundlagen der Geometrie' im Vergleich zu anderen Fachmathematik Vorlesungen (Lineare Algebra, EmDA, Analysis, Grundlagen der Geometrie in den vorherigen Jahren...) dazu geeignet:

- … Einen Einblick in das Wesen moderne Hochschulmathematik zu erhalten?
- … Zu vermitteln welche Bedeutung moderne Mathematik in unsere technologisierten Gesellschaft hat?"

Als Antwortmöglichkeit war eine Likert-Skala mit den folgenden Optionen gegeben: deutlich besser geeignet -- etwas besser geeignet -- weder noch -- eher schlechter geeignet -- deutlich schlechter geeignet.

Aufgabe 7 (6 + 3 + 3 = 12 Punkte)
Forscher haben festgestellt, dass die Bewohner des Sauerlandes bei den meisten Unterhaltungen mit drei Wörtern auskommen. Dies sind „Mhhh.", „Woll." und „Bier.". Damit ist das sauerländer Alphabet definiert durch $\mathcal{S} := \{\text{Mhhh., Woll., Bier.}\}$.

Ein bekannter Deutscher Mobilfunkanbieter will nun mit dem so genannten SAUERPHONE ein Mobilfunkgerät entwickeln, dass das auf das versenden von Nachrichten im Sauerland optimiert ist. Es soll drei Tasten enthalten, die wie folgt nebeneinander angeordnet sind:

$$\boxed{\text{Mhhh.}} — \boxed{\text{Woll.}} — \boxed{\text{Bier.}}$$

Um eine Autokorrekturfunktion realisieren zu können muss zunächst ein sinnvoller Abstandsbegriff auf Nachrichten bestehend aus Elementen aus $\mathcal{S}$ definiert werden. Dieser soll ein Maß für Tippfehler sein. Tippfehler zwischen $\boxed{\text{Mhhh.}}$ und $\boxed{\text{Bier.}}$ sollen dabei *doppelt* so schwerwiegend sein, wie Tippfehler zwischen benachbarten Tasten.

a) Geben Sie zunächst eine Metrik $d_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ an, die einen Abstandsbegriff für die drei Elemente von $\mathcal{S}$ entsprechende der Situationsbeschreibung liefert und weisen Sie die Metrikeigenschaften nach.
Hinweis: Bei der $\triangle$-Ungleichung brauchen Sie nur den Fall zu beweisen, dass alle drei Elemente paarweise verschieden sind.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Definieren Sie nun basierend auf $d_{\mathcal{S}}$ eine Metrik $d : \mathcal{S}^n \times \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$, mit der man den Abstand zwischen zwei Nachrichten bestehend aus n sauerländer Wörtern bestimmen kann. Rechnen Sie bei den Metrikeigenschaften nur die Dreiecksungleichung (M3) nach.

c) Für $n = 3$ sind im SAUERDUDEN die folgenden drei sinnvollen sauerländer Aussagen bestehend aus drei sauerländer Wörtern beschrieben:
$$\{(Mhhh.,\ Mhhh.,\ Mhhh.),$$
$$(Bier.,\ Bier.,\ Bier.),$$
$$(Mhh.,\ Bier.,\ Woll.)\}$$
Wie viele Tippfehler können in diesem Fall bei einer Nachricht bestehend aus drei sauerländer Wörtern korrigiert werden? Geben Sie eine *kurze* Begründung für Ihre Antwort an.

Abbildung 3: Klausuraufgabe, die an die Exkursinhalte anknüpft

In zukünftigen Veranstaltungen würden wir das Konzept der Exkursinhalte auch auf andere Vorlesungen ausweiten. Ihre Relevanz scheint uns hierbei nicht auf die Lehramtsveranstaltungen beschränkt zu sein, die anvisierten Lernziele scheinen uns vielmehr auch für Studenten der Mathematik sehr relevant zu sein. Wir hoffen, dass die in dieser Arbeit beschriebenen Überlegungen eine Grundlage für die Konzeption weitere Exkursinhalte in anderen Vorlesungskontexten bilden kann.

Literatur

Ball, D. L. & Bass, H. (2009). With an eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathema tics for Teaching to Learners' Mathematical Futures (S. 25-36). *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Online verfügbar unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2009/Beitraege/Gesamt/Gesamt.pdf [letzter Zugriff am 22.08.2017].

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 39–56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. In *Mathematische Semesterberichte*, 56(1), S. 85-103.

Baumert, J. & Kunter, M. (2011). Das Kompetenzmodell von COACTIV. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 29–53). Münster u.a.: Waxmann.

Beiler, A. H. (1964). Recreations in the theory of numbers: The queen of mathematics entertains. New York: Dover Publications.

Blömeke, S. (2009). Lehrerausbildung. In S. Blömeke, T. Bohl, L. Haag, G. Lang-Wojtasik & W. Sacher (Hrsg.), *Handbuch Schule. Theorie - Organisation – Entwicklung* (S. 483–490). Bad Heilbrunn: Klinkhardt / UTB.

Ifrah, G. (1991). *Universalgeschichte der Zahlen* (2. Aufl.). Campus Verlag GmbH, Frankfurt/Main.

Klein, F. (1908*). Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis*. Leipzig: Teubner. (Zitiert nach der handschriftlichen Urfassung in openlibrary.org.)

Kunter, M., Kleickmann, T., Klusmann, U. & Richter, D. (2011). Die Entwicklung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften. In M. Kunter, J. Baumert, W. Blum, U. Klusmann, S. Krauss & M. Neubrand (Hrsg.), *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV* (S. 55–68). Münster u.a.: Waxmann.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW NRW). (2007). Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen Mathematik (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

Scriba, C. J. & Schreiber, P. (2013). 5000 Jahre Geometrie: Geschichte Kulturen Menschen. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–23.

Universität Paderborn (UPB). (2016a). Allgemeine Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen an der Universität Paderborn. Zugriff auf http://digital.ub.uni.paderborn.de/hs/download/pdf/2083933?originalFilename=true [letzter Zugriff am 17.10.2016]

Universität Paderborn (UPB). (2016b). Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn. (Noch nicht veröffentlicht. Vorabversion)

UPB. (2016c). Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Masterstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn. (Noch nicht veröffentlicht. Vorabversion)

Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. Richard courant lecture in mathematical sciences delivered at New York University, May 11, 1959. *Communications on Pure and Applied Mathematics, 13*(1), 1–14.

Winter, H. (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* 61, 37–46.

Autoren

Jun.-Prof. Dr. Tobias Weich. Universität Paderborn, Institut für Mathematik, Paderborn, Deutschland; Email: tobias.weich@math.upb.de

Max Hoffmann. Universität Paderborn, Institut für Mathematik, Paderborn, Deutschland; Email: max.hoffmann@math.upb.de

Zitiervorschlag: Weich, T. & Hoffmann, M. (2017). Exkursinhalte in der fachmathematischen Lehramtsausbildung: Wie man das Wesen und die Rolle der Mathematik vermittelt. *die hochschullehre*, Jahrgang 3/2017, online unter: www.hochschullehre.org